Title	空間$B_{p, \mu}(R^N)$における跡作用素について (作用素イデヤルの研究)
Author(s)	板野, 暢之
Citation	数理解析研究所講究録 (1977), 306: 1-17
Issue Date	1977-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/103851
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
306巻 1977年 1-17

空間 $B_{p,\mu}(R^N)$ における跡作用素について

広島大 総合科　板野 暢之

$\mathcal{H}_{(m)}(R^N)$ はユークリッド空間 R^N での緩増加超関数 $u \in \mathcal{S}'(R^N)$ で，その Fourier 変換 $\hat{u}$ が局所可積分関数，かつ

$$\int_{\Xi^N} |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^m d\xi < \infty$$

となる u 全体の作る空間である。これは temperate weight function μ として $(1+|\xi|^2)^{m/2}$ をとった場合の空間 $H^{\mu}(R^N)$ である。$\mathcal{H}_{(m,s)}(R^N)$ も $H^{\mu}(R^N)$ の特殊な場合であり，これらは偏微分方程式論でよく現われてくる基礎空間である。

$m > \frac{1}{2}$，l を $m-\frac{1}{2}$ より小さい最大整数とするとき，写像

$$\mathcal{H}_{(m)}(R^N) \ni u \longrightarrow \left(u(x';0), \cdots, \frac{\partial^l}{\partial x_N^l} u(x';0)\right) \in \prod_{j=0}^{l} \mathcal{H}_{(m-j-\frac{1}{2})}(R^{N-1})$$

は epimorphism であることが知られている。

ここでは，空間 $B_{p,\mu}(R^N)$ ($B_{2,\mu}(R^N) = H^{\mu}(R^N)$) において跡作用素を中心として研究し，超関数の乗法積，section との関係を明らかにしたい。とくに上記に対応する trace mapping が，epimorphism になる簡単な十分条件を求めたい。

R^N とその双対空間 Ξ^N の任意の点を $x=(x_1,\cdots,x_N)$, $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_N)$

とし，そのスカラー積を $\langle x,\xi\rangle=\sum x_j\xi_j$，$x$ の長さを $|x|=(\sum|x_j|^2)^{1/2}$ とする。微分演算子 $D_j=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ に対し $D=(D_1,\cdots,D_N)$ とかき，多項式 $P(\xi)=\sum a_\alpha\xi^\alpha$ に対して $P(D)=\sum a_\alpha D^\alpha$，$\bar{P}(\xi)=\sum\bar{a}_\alpha\xi^\alpha$，$\tilde{P}_p(\xi)=\{\sum_{|\alpha|\geq 0}|P^{(\alpha)}(\xi)|^p\}^{1/p}$ とおく。ここで $p\geq 1$，$P^{(\alpha)}(\xi)=i^{|\alpha|}D^\alpha P(\xi)$ である。

$\mathcal{S}(R^N)$ の任意の元 ϕ に対し，その Fourier 変換を

$$\hat{\phi}(\xi)=\int_{R^N}\phi(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx$$

とし，$u\in\mathcal{S}'(R^N)$ の Fourier 変換は

$$\langle\hat{u},\phi\rangle=\langle u,\hat{\phi}\rangle,\qquad \phi\in\mathcal{S}(R^N)$$

で定義する。

Ξ^N 上で定義された正値連続関数 $\mu(\xi)$ が

$$\mu(\xi+\eta)\leq C(1+|\xi|^k)\mu(\eta),\qquad \xi,\eta\in\Xi^N$$

をみたす定数 C，k が存在するとき，μ は temperate weight function と呼ばれる。μ_1,μ_2 が temperate weight function ならば，$\mu_1+\mu_2$，$\mu_1\mu_2$，$1/\mu_1$ はまた temperate weight function である。$C_1\leq\mu_1/\mu_2\leq C_2$ なる定数 C_1，C_2 が存在するとき，μ_1,μ_2 は同値といって $\mu_1\sim\mu_2$ と記す。

$1\leq p\leq\infty$ とし，μ を temperate weight function とする。$u\in\mathcal{S}'(R^N)$ で $\hat{u}(\xi)$ が局所可積分な関数，かつ

$$\|u\|_{p,\mu}=\left(\frac{1}{(2\pi)^N}\int|\hat{u}(\xi)\mu(\xi)|^pd\xi\right)^{1/p}<\infty$$

となる u 全体の作る空間を $B_{p,\mu}(R^N)$ とする。$p=\infty$ のと

き，$\|u\|_{p,\infty}$ は ess. sup $|\hat{u}(\xi)\mu(\xi)|$ とする。$p=2$ のとき $B_{2,\mu}(R^N)$ を $H^{\mu}(R^N)$ と記す。これらの空間の性質は L. Hörmander, L. R. Volevič - B. P. Panejah によってくわしく調べられている。$B_{p,\mu}(R^N)$ は Banach 空間で $\mathcal{S}(R^N) \subseteq B_{p,\mu}(R^N) \subseteq \mathcal{S}'(R^N)$ であり，$p<\infty$ の場合 $\mathcal{D}(R^N)$ が $B_{p,\mu}(R^N)$ で稠密で，$B_{p,\mu}(R^N)$ の strong dual $(B_{p,\mu}(R^N))'$ は $B_{p',1/\mu}(R^N)$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$ である。以下 $1<p<\infty$ とする。

$u \in B_{p,\mu}(R^N)$，$w \in B_{p',1/\mu}(R^N)$ に対して

$$\langle w, \bar{u} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\Xi^N} \hat{w}\,\bar{\hat{u}}\,d\xi .$$

$N=n+m$ とし，$x=(x',t)$，$x'=(x_1,\cdots,x_n)$，$t=(t_1,\cdots,t_m)$，$\xi=(\xi',\tau)$，$\xi'=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$\tau=(\tau_1,\cdots,\tau_m)$，また $D^{\alpha}=D_{x'}^{\alpha'}D_t^{\alpha''}$ と記す。Volevič - Panejah は μ が Ξ^{n+m} 上の temperate weight function のとき $\int_{\Xi^m}\mu(\xi',\tau)d\tau$ は Ξ^n の任意の点 ξ' で発散するか，または任意の点 ξ' で収束するかのいづれかであり，収束するときは，Ξ^n 上の temperate weight function であることを証表した。

$\mathcal{D}(R^{n+m})$ の任意の元 $u(x)$ に対して $u(x',0) \in \mathcal{D}(R^n)$ を対応させる写像は連続である。$\mathcal{D}(R^{n+m})$ は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ で稠密である。もし $u \to u(x',0)$ が $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ から $\mathcal{D}'(R^{n+m})$ に連続的に拡張されるならば，この拡張された写像を trace mapping と呼び，u のこの写像による像を u の $t=0$ 上への

trace とよび $u(x';0)$ と記す。

これは，任意の $\phi \in \mathcal{D}(R^n)$ に対して

$$\phi \otimes \delta \in B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$$

を意味することから，$B_{p,\mu}(R^N)$ の任意の元 u が trace $u(x';0)$ をもつための条件は $1/\mu(0,\zeta) \in L^{p'}(R^m)$ である。

$\mathcal{S}(R^{n+m})$ の任意の元 u に対して

$$u(x';0)=\frac{1}{(2\pi)^{n+m}}\iint \hat{u}(\xi';\zeta)e^{i\langle x',\xi'\rangle}d\xi'd\zeta=\frac{1}{(2\pi)^m}\int \hat{u}_\zeta(x';\zeta)d\zeta$$

より

$$\widehat{u(x';0)}=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\Xi^m}\hat{u}(\xi';\zeta)d\zeta$$ を得る。ξ の多項式

$P(\xi)$ に対して $\tilde{P}_p(\xi)$ は一つの temperate weight function になることから

<u>定理 1.</u> $P(\xi)=P(\xi';\zeta)$ を non-trivial polynomial，μ を Ξ^{n+m} 上の temperate weight function とする。$B_{p,\mu}(R^{n+m})$ の各元 u に対して R^n 上への trace $P(D)u(x';0)$ が存在するための条件は，次の条件 (1)，(2) のいずれかが成立することである。

(1) Ξ^n のある点 ξ' で $\dfrac{1}{\mu_{\tilde{P},p'}(\xi')}=\left\{\displaystyle\int_{\Xi^m}\frac{\tilde{P}^{p'}_{p'}(\xi';\zeta)}{\mu^{p'}(\xi';\zeta)}d\zeta\right\}^{1/p'}<\infty$.

(2) Ξ^n の任意の点 ξ' で $\displaystyle\int_{\Xi^m}\frac{|P(\xi';\zeta)|^{p'}}{\mu^{p'}(\xi';\zeta)}d\zeta<\infty$.

このとき，$P(D)u(x';0)\in B_{p,\mu_{\tilde{P},p'}}(R^n)$ である。

$B_{p,\mu}(R^{n+m})$ のすべての元 u に対して $P(D)u(x';0)\in B_{p,\nu}(R^n)$ になるための条件は，次の条件 (1)'，(2)' のいずれかである。

$$(1)' \qquad \nu(\xi') \leqq C_1 \mu_{\tilde{P},p'}(\xi').$$

$$(2)' \qquad \nu^{p'}(\xi') \int_{\Xi^m} \frac{|P(\xi';\zeta)|^{p'}}{\mu^{p'}(\xi';\zeta)} d\zeta \leqq C_2.$$

証) $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ の各元 u が trace $P(D)u(x';0)$ をもつと仮定する。任意の $\eta \in \Xi^{n+m}$ に対して写像 $u \longrightarrow e^{i\langle x,\eta\rangle}u$ は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ から $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ へ連続，また $P(D)e^{i\langle x,\eta\rangle}u = e^{i\langle x,\eta\rangle}P(D+\eta)$ より任意の $\phi \in \mathcal{D}(R^n)$ に対し

$$B_{p,\mu}(R^{n+m}) \ni u \longrightarrow \langle P(D+\eta)u(x';0), \phi\rangle = \langle u, \overline{P}(D+\eta)(\phi\otimes\delta)\rangle$$

は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ 上の continuous linear functional，即ち

$$\overline{P}(D+\eta)(\phi\otimes\delta) \in B_{p',1/\mu}(R^{n+m}), \qquad \phi \in \mathcal{D}(R^n).$$

従って $\overline{P}(\xi+\eta)\hat{\phi}(\xi')/\mu(\xi) = \hat{\phi}(\xi')\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\overline{P}^{(\alpha)}(\xi)/\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$.
$\{\eta^\alpha\}$ は一次独立だから，各 α に対して $\hat{\phi}(\xi')\overline{P}^{(\alpha)}(\xi)/\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$. 故に Ξ^n の a.e. の点 ξ' で $\int_{\Xi^m}\frac{\tilde{P}^{p'}_{p'}(\xi';\zeta)}{\mu^{p'}(\xi';\zeta)}d\zeta < \infty$.
$\tilde{P}_{p'}$，μ は temperate weight function だから，この積分は，すべての点 $\xi' \in \Xi^{n+m}$ で存在し temperate weight function である。

(1) $\Rightarrow$ (2) は明らかであるから (2) を仮定する.

$$\widehat{P(D)u(x';0)}(\xi') = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\Xi^m} P(\xi)\hat{u}(\xi)d\zeta, \qquad u \in \mathcal{D}(R^{n+m})$$

より，任意の $\phi \in \mathcal{D}(R^n)$ に対して

$$|\langle P(D)u(x';0), \bar{\phi}\rangle| = \frac{1}{(2\pi)^{n+m}}\left|\int_{\Xi^{n+m}} P(\xi)\hat{u}(\xi)\bar{\hat{\phi}}(\xi')d\xi\right|$$

$$\leqq \frac{1}{(2\pi)^{n+m}}\left(\int_{\Xi^n}|\hat{\phi}(\xi')|^{p'}\left(\int_{\Xi^m}\frac{|P(\xi)|^{p'}}{\mu^{p'}(\xi)}d\zeta\right)d\xi'\right)^{1/p'}\left(\int_{\Xi^{n+m}}|\hat{u}(\xi)|^p\mu^p(\xi)d\xi\right)^{1/p}.$$

$P(\xi)=\sum_{|\alpha'|\geq 0}\frac{\xi'^{\alpha'}}{\alpha'!}P^{(\alpha')}(0,\zeta)$ と仮定から $\int_{\Xi^m}\frac{|P^{(\alpha')}(0,\zeta)|^{p'}}{\mu^{p'}(0,\zeta)}d\zeta<\infty$. さらに $\mu(0,\zeta)\leq C(1+|\xi'|^k)\mu(\xi',\zeta)$ より

$$\int_{\Xi^m}\frac{|P^{(\alpha')}(0,\zeta)|^{p'}}{\mu^{p'}(\xi',\zeta)}d\zeta\leq C^{p'}(1+|\xi'|^k)^{p'}\int_{\Xi^m}\frac{|P^{(\alpha')}(0,\zeta)|^{p'}}{\mu^{p'}(0,\zeta)}d\zeta .$$

従って $\int_{\Xi^m}\frac{|P(\xi)|^{p'}}{\mu^{p'}(\xi)}d\zeta$ は ξ' にかんして緩増加関数である．また $\mathcal{D}(R^{n+m})$ は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ で稠密だから $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ の任意の元 u は trace $P(D)u(x';0)$ をもつ。

なお $\mathcal{D}(R^{n+m})$ の任意の元 u に対して

$$\|P(D)u(x';0)\|_{p,\mu_{\tilde{P},p'}}\leq\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m/p'}\|u\|_{p,\mu}$$

を示すことができる。このことから $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ の任意の元 u に対して $P(D)u(x';0)$ は $B_{p,\mu_{\tilde{P},p'}}(R^n)$ に属することがわかる．

後半の証明も同様である．

<u>定理 2</u> $\frac{1}{\mu_{\tilde{P},p'}(\xi')}=\left\{\int_{\Xi^m}\frac{\tilde{P}_{p'}^{p'}(\xi',\zeta)}{\mu^{p'}(\xi',\zeta)}d\zeta\right\}^{1/p'}<\infty$ とする。写像

$$\tau:\ B_{p,\mu}(R^{n+m})\ni u\longrightarrow P(D)u(x';0)\in B_{p,\mu_{\tilde{P},p'}}(R^n)$$

が epimorphism になるための条件は次の条件のいずれかである．

(1) ${}^t\tau$ の range が $B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$ で閉じている．

(2) $\frac{1}{\nu_{p'}(\xi')}=\left\{\int\frac{|P(\xi',\zeta)|^{p'}}{\mu^{p'}(\xi',\zeta)}d\zeta\right\}^{1/p'}$ が temperate weight function になる．

(3) $f(\xi')$ が Ξ^n の局所可積分関数で $f(\xi')\bar{P}(\xi)/\mu(\xi)\in L^{p'}(\Xi^{n+m})$ な

らば $f(\xi)/\mu_{\tilde{p},p'}(\xi) \in L^{p'}(\Xi^n)$ である.

このとき $\nu_{p'}(\xi) \sim \mu_{\tilde{p},p'}(\xi)$ である.

この定理から $P(\xi;z)$ が z のみの多項式のとき

$$\frac{1}{\nu_{p'}(\xi)} = \left\{ \int_{\Xi^m} \frac{|P(z)|^{p'}}{\mu^{p'}(\xi;z)} dz \right\}^{1/p'} < \infty$$

であれば, $\nu_{p'}$ は Ξ^n 上の temperate weight function になり, 写像 $u \longrightarrow P(D_z)u(x;0)$ は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ から $B_{p,\nu_{p'}}(R^n)$ への epimorphism である.

M を non-negative integer とし, $\int_{\Xi^m} \frac{|z|^{Mp'}}{\mu^{p'}(\xi;z)} dz < \infty$ とする.
non-negative integer k_j の組 $k=(k_1,\cdots,k_m)$ が $|k| \leqq M$ のとき

$$\frac{1}{\nu_{k,p'}(\xi)} = \left\{ \int_{\Xi^m} \frac{|z^k|^{p'}}{\mu^{p'}(\xi;z)} dz \right\}^{1/p'}$$

とおき, trace mapping τ :

$$B_{p,\mu}(R^{n+m}) \ni u \longrightarrow \{ D_z^k u(x;0) \}_{|k| \leqq M} \in \prod_{|k| \leqq M} B_{p,\nu_{k,p'}}(R^n)$$

を考える. ${}^t\tau$ は $H' = \prod_{|k| \leqq M} B_{p',1/\nu_{k,p'}}(R^n)$ から $B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$ への写像で $v = \{ v_k \}_{|k| \leqq M} \in H'$ に対して

$$\widehat{{}^t\tau v}(\xi) = \sum_{|k| \leqq M} \hat{v}_k(\xi) z^k$$

となることから ${}^t\tau$ は injective であることがわかり, 次の結果を得る.

定理 3. τ が epimorphism になるための条件は，${}^t\tau$ の range が $B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$ で閉じていることである．

定理 4. $p=2$ のとき，τ が epimorphism になるための条件は 次の条件のいづれかが成立することである．

(1). $\det|\chi_{k+\ell}| \geq C\prod_{|k|\leq M}\chi_{2k}$ ただし $\chi_k(\xi')=\int_{\Xi^m}\frac{\tau^k}{\mu^2(\xi',\tau)}d\tau$．

(2). $u\in H^{1/\mu}(R^{n+m})$ で，$\hat{u}(\xi)=\sum_{|k|\leq M}f_k(\xi')\tau^k$ ならば，すべての k に対して $f_k/\nu_{k,2}\in L^2(\Xi^n)$．

(3) $u\in H^{1/\mu}(R^{n+m})$ で，$\hat{u}(\xi)=\sum_{|k|\leq M}f_k(\xi')\tau^k$ ならば，$j=1,2,\cdots,m$ に対して

$$\hat{u}(\xi',\tau_1,\cdots,\tau_{j-1},\frac{\tau_j}{2},\tau_{j+1},\cdots,\tau_m)/\mu(\xi)\in L^2(\Xi^{n+m}).$$

$1<p<\infty$ なる任意の p に対し

定理 5. 次の条件は同値である．

(1) $u\in B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$, $\hat{u}(\xi)=\sum_{|k|\leq M}f_k(\xi')\tau^k$ ならば すべての k に対して $f_k/\nu_{k,p'}\in L^{p'}(\Xi^n)$．

(2) $u\in B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$, $\hat{u}(\xi)=\sum_{|k|\leq M}f_k(\xi')\tau^k$ ならば $j=1,2,\cdots,m$ に対して

$$\hat{u}(\xi',\tau_1,\cdots,\tau_{j-1},\frac{\tau_j}{2},\tau_{j+1},\cdots,\tau_m)/\mu(\xi)\in L^{p'}(\Xi^{n+m}).$$

(3) $u\in B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$, $\hat{u}(\xi)=\sum_{|k|\leq M}f_k(\xi')\tau^k$ ならば，任意の整数 $i_j\geq 0$ に対して $\hat{u}(\xi',\frac{\tau_1}{2^{i_1}},\cdots,\frac{\tau_m}{2^{i_m}})\in L^{p'}(\Xi^{n+m})$．

このとき，上記 trace mapping τ は epimorphism である．

証) (1) ⇒ (2)． (1) より $f_k/\nu_{k,p'} \in L^{p'}(\Xi^n)$． これは $f_k(\xi')z^k/\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$ を意味する． $f_k(\xi')z^k/2^{k_j}\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$ を k について加えることにより $\hat{u}(\xi'; z_1, \dots, \frac{z_j}{2}, \dots, z_m)/\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$ を得る．

(2) ⇒ (3)． (2) より $\hat{u}(\xi'; z_1, \dots, \frac{z_j}{2}, \dots, z_m)/\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$． また $\hat{u}(\xi'; z_1, \dots, \frac{z_j}{2}, \dots, z_m) = \sum_{|k| \le M} f_k(\xi')z^k/2^{k_j}$ より $\hat{u}(\xi'; z_1, \dots, \frac{z_j}{4}, \dots, z_m)/\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$． これをくりかえすことにより (3) を得る．

(3) ⇒ (1)． (3) より $\hat{u}(\xi'; \frac{z_1}{2^{i_1}}, \dots, \frac{z_m}{2^{i_m}})/\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$． $i_1, \dots, i_{m-1}$ を固定して i_m を $0, 1, \dots, M$ と動かすことにより，各 $j = 0, 1, \dots, M$ に対し

$$\sum_{k_1+\dots+k_{m-1} \le M-j} f_{k_1 \cdots k_{m-1}, j}(\xi') \left(\frac{z_1}{2^{i_1}}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{z_{m-1}}{2^{i_{m-1}}}\right)^{k_{m-1}} z_m^j / \mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m}).$$

この操作をくりかえして，$|k| \le M$ なるすべての k に対して $f_k(\xi')z^k/\mu(\xi) \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$，すなわち $f_k/\nu_{k,p'} \in L^{p'}(\Xi^n)$ を得る．

(3) が成立するとき，${}^t\tau$ の range が $B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$ で閉じていることを示す． $\vec{v}^j = (v_k^j)_{|k| \le M} \in H' = \prod B_{p',1/\nu_k}(R^n)$ に対し ${}^t\tau \vec{v}^j$ が $B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$ で u に収束するとする． 即ち $\sum_{|k| \le M} \hat{v}_k^j(\xi')z^k/\mu$ は $L^{p'}(\Xi^{n+m})$ で $\hat{u}/\mu$ に収束する． μ は正値連続関数だから $\sum \hat{v}_k^j(\xi')z^k$ は $L^1_{loc}(\Xi^{n+m})$ で $\hat{u}$ に収束する． このことから $\hat{u} = \sum_{|k| \le M} \hat{v}_k(\xi')z^k$， $\hat{v}_k \in L^1_{loc}(\Xi^{n+m})$ と書かれる． (3) より $\hat{u}(\xi'; \frac{z_1}{2^{i_1}}, \dots, \frac{z_m}{2^{i_m}})/\mu =$

$\sum \hat{v}_k(\xi')\left(\frac{\tau_1}{2^{i_1}}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\tau_m}{2^{i_m}}\right)^{k_m}/\mu \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$. $i_1,\cdots,i_{m-1}$ を固定して $i_m=0,1,\cdots,M$ と動かすことにより，各 $j=0,1,\cdots,M$ に対して

$$\sum_{k_1+\cdots+k_{m-1}\leq M-j} \hat{v}_k(\xi')\left(\frac{\tau_1}{2^{i_1}}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\tau_{m-1}}{2^{i_{m-1}}}\right)^{k_{m-1}}\tau_m^{\,j}/\mu \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$$

を得る．この操作をくりかえすことにより，$|k|\leq M$ なる k に対して $\hat{v}_k(\xi')\tau^k/\mu \in L^{p'}(\Xi^{n+m})$ がわかる．$v_k=\mathcal{F}_{x'}^{-1}(\hat{v}_k(\xi'))$ と定義すれば $v_k \in B_{p',1/\nu_k}(R^n)$ となり u は τ の range に属する．

系 μ が Ξ^{n+m} 上の temperate weight function で

$$\mu(\xi';\tau_1,\cdots,\tau_{j-1},2\tau_j,\tau_{j+1},\cdots,\tau_m)\geq C\mu(\xi';\tau),\quad j=1,2,\cdots,m$$

をみたす定数 $C>0$ が存在すれば，trace mapping τ は epimorphism である．

次に $\prod_{|k|\leq M} B_{p,\nu_k}(R^n)$ の元を与えて，それを trace にもつ $u\in B_{p,\mu}(R^{n+m})$ を L. Hörmander の方法で構成する．

定理 6. $\prod_{|k|\leq M} B_{p,\nu_k}(R^n)$ の任意の元を $\vec{f}=(f_k(x'))_{|k|\leq M}$ とする．ψ を $\mathcal{D}(R^m)$ の元で 0-近傍で 1 に等しい任意の関数とする．temperate weight function $\mu(\xi';\tau)$ に対して

$$\mu(\xi';\lambda_k(\xi')\tau)\leq \lambda_k^{|k|+\frac{m}{p'}}(\xi')\,\nu_k(\xi')\,\Phi_k(\tau)$$

をみたす Ξ^n 上の正値連続関数 λ_k と, Ξ^n 上で緩増加な連続関数 $\Phi_k(\tau)$ が存在するとき,

$$\hat{u}_{x'}(\xi', t) = \sum_{|k| \leq M} \hat{f}_k(\xi') \frac{(it)^k}{k!} \psi(\lambda_k(\xi')t)$$

とおくと, $u \in B_{p,\mu}(R^{n+m})$ で $|k| \leq M$ なる各 k に対して $D_t^k u(x', 0) = f_k(x')$ をみたす.

証) $$\hat{u}(\xi', \tau) = \sum_{|k| \leq M} \frac{(-i)^{|k|}}{k!} \hat{f}_k(\xi') D_\tau^k \int_{\Xi^m} \psi(\lambda_k t) e^{-i\langle t, \tau\rangle} d\tau$$

$$= \sum_{|k| \leq M} \frac{(-i)^{|k|}}{k!} \hat{f}_k(\xi') \frac{1}{\lambda^{|k|+m}} D_\tau^k \hat{\psi}\left(\frac{\tau}{\lambda_k}\right)$$

より

$$\int_{\Xi^{n+m}} |\hat{u}\mu|^p d\xi \leq C \sum_{|k| \leq M} \int_{\Xi^n} \frac{1}{(k!)^p} |\hat{f}_k(\xi')|^p \frac{d\xi'}{\lambda_k^{p(|k|+m)-m}} \int_{\Xi^m} |D_\tau^k \hat{\psi}(\tau)|^p \mu^p(\xi', \lambda_k \tau) d\tau$$

$$\leq C \sum_{|k| \leq M} \int_{\Xi^n} \frac{1}{(k!)^p} |\hat{f}_k(\xi')|^p \nu_k^p(\xi') d\xi' \int_{\Xi^m} |D_\tau^k \hat{\psi}(\tau)|^p |\Phi_k(\tau)|^p d\tau.$$

ここで $D_\tau^k \hat{\psi}(\tau) \in \mathcal{S}(\Xi^m)$, $\Phi_k(\tau)$ は緩増加関数だから右辺の積分は収束する. u の作り方から $D_t^k u(x', 0) = f_k(x')$ は明らか.

trace mapping と他の概念との関係を調べてみる.

$u, v \in \mathcal{D}'(R^N)$ とする. R^N 上の任意の δ-列 $\{\rho_j\}$ に対して, 超関数的極限 $\lim_{j\to\infty}(u * \rho_j)v$ が存在すれば, この極限は一意的にきまるから, これを u, v の strict sense の乗法積

とよび $u\cdot v$ とかく．このとき任意の δ-列 $\{\rho_j\}$ に対して $\lim_{j\to\infty} u(v*\rho_j)$ も存在し

$$\lim_{j\to\infty}(u*\rho_j)v = \lim_{j\to\infty} u(v*\rho_j) .$$

$\mathcal{D}(R^N)$ の元 ϕ が $\phi \geqq 0$, $\int_{R^N}\phi\,dx = 1$ をみたすとき，$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ とおき，上の $\{\rho_j\}$ の代りに $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ でおきかえたとき $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(u*\phi_\varepsilon)v$ が存在すれば weak sense の積とよび uv とかく．このとき $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は次の restricted δ-sequence によっておきかえられることが白石氏により示されている．restricted δ-seq. とは $\rho_j \in \mathcal{D}(R^N)$ で

(i) $\quad \mathrm{supp}\,\rho_j \to \{0\} \qquad (j\to\infty)$

(ii) $\quad \int \rho_j\,dx \to 1 \qquad (j\to\infty)$

(iii) $\quad \int |x|^{|k|}|D^k\rho_j(x)|\,dx \leqq M_k$ （M_k は ρ_j に無関係な定数）

をみたす列である．

strict sense の場合も同様に論じられるので weak sense の場合に限って以下のべる．$w\in\mathcal{D}'(R^m)$, $u\in\mathcal{D}'(R^{n+m})$ に対して部分積 wu は $(1\otimes w)u$ が存在するとき，これで定義する．$\delta\in\mathcal{D}'(R^m)$ とする．δu は R^m 上の任意の restricted δ-seq. $\{\rho_j\}$ に対して $\lim_{j\to\infty}(\delta*\rho_j)u$ または $\lim_{j\to\infty}\delta(u*_t\rho_j)$ として定義される。ここで $*_t$ は t にかんする partial convolution である．$\{\rho_j\}$ は上でのべた $\{\phi_\varepsilon(t)\}_{\varepsilon>0}$ でもおきかえられる．

S. Łojasiewicz は超関数に対し section の概念を導入した。$u \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$ が R^n 上に section $\in \mathcal{D}'(R^n)$ をもつとは，超関数的極限 $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} u(x'; \varepsilon t)$ が存在し，t に無関係であることである。これは δu の存在と同値である。事実 u が R^n 上に section をもつことは，$\phi(t) \geq 0$，$\int_{R^m} \phi(t)dt = 1$ なる任意の $\phi \in \mathcal{D}(R^m)$ に対して，超関数的極限 $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \langle u, \phi_\varepsilon \rangle$ が存在し，ϕ に無関係にきまることである。$\langle u, \phi_\varepsilon \rangle \otimes \delta = \delta(u *_t \check{\phi}_\varepsilon)$ であるから section の存在は δu の存在と同値である。u の section を α とすると $\alpha = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \langle u, \phi_\varepsilon \rangle$ であり，また $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} u(x'; \varepsilon t) = \alpha \otimes 1_t$，$\delta u = \alpha \otimes \delta$ である。

<u>定理 7</u>. 空間 $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ において次の条件は同値である。

(1) trace mapping $B_{p,\mu}(R^{n+m}) \ni u \to u(x'; 0) \in \mathcal{D}'(R^n)$ が存在する。

(2) $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ のすべての元 u が section をもつ。

(2)' 条件 (2) が strict sense でいえる。

(3) $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ のすべての元 u に対し，$\delta \in \mathcal{D}'(R^m)$ との乗法積 δu が存在する。

(3)' $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ のすべての元 u に対し $\delta \cdot u$ が存在する。

(4) $\mathcal{D}(R^{n+m})$ のある δ-列 $\{\rho_j\}$ に対して $\lim\limits_{j \to \infty} (u * \rho_j)\delta$ が存在する。

(5) $\mathcal{D}(R^m)$ のある δ-列に対して $\lim\limits_{j \to \infty} \rho_j u$ が存在する。

証) (2), (3) の同値は既に注意した. 同様に (2)$'$, (3)$'$ も同値. (3)$'$ ⇒ (3), (3) ⇒ (4), (5) は定義より明らかだから (1) ⇒ (3)$'$, (4) ⇒ (1), (5) ⇒ (1) を証明すればよい.

(1) ⇒ (3)$'$. (1) を仮定すれば任意の $\psi \in \mathcal{D}(R^n)$ に対して $\psi \otimes \delta \in B_{p', 1/\mu}(R^{n+m})$. $u \in B_{p,\mu}(R^{n+m})$ とし, $\{\rho_j\}$ を R^{n+m} 上の任意の δ-列とする. $u * \rho_j$ は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ で u に収束する. 任意の $\phi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ に対して等式

$$\langle (u * \rho_j)\delta, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle u * \rho_j, \phi(x', 0) \otimes \delta \rangle_{B_{p,\mu}, B_{p', 1/\mu}}$$

より $\lim_{j \to \infty} (u * \rho_j)\delta$ の存在がわかる. 即ち $\delta \cdot u$ が存在する.

(4) ⇒ (1). $\{\rho_j\}$ をある固定した $\mathcal{D}(R^{n+m})$ での δ-列とする.

$$B_{p,\mu}(R^{n+m}) \ni u \to (u * \rho_j)\delta = (u * \rho_j)(x', 0) \otimes \delta \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$$

なる写像は, 各 j に対して連続で, 空間 $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ は barrelled だから写像

$$B_{p,\mu}(R^{n+m}) \ni u \longrightarrow \lim_{j \to \infty} (u * \rho_j)\delta \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$$

は連続である. 故に任意の $\phi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ に対して

$$\langle \lim_{j \to \infty} (u * \rho_j)\delta, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle u, \omega_\phi \rangle_{B_{p,\mu}, B_{p', 1/\mu}}$$

なる $\omega_\phi \in B_{p', 1/\mu}(R^{n+m})$ が存在する.

$u = \alpha \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ をとると

$$\langle \alpha\delta, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle \alpha, \phi(x', 0) \otimes \delta \rangle = \langle \alpha, \omega_\phi \rangle.$$

$\mathcal{D}(R^{n+m})$ は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ で稠密だから $\phi(x';0)\otimes\delta = \omega_\phi \in B_{p',1/\mu}(R^{n+m})$. すなわち trace mapping が存在する.

(5) ⇒ (1). $\{\rho_j\}$ を $\mathcal{D}(R^m)$ である δ-列とする. 写像

$$B_{p,\mu}(R^{n+m}) \ni u \longrightarrow \rho_j u \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$$

は連続であるから Banach-Steinhaus の定理から, 写像

$$B_{p,\mu}(R^{n+m}) \ni u \to \lim_{j\to\infty} \rho_j u \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$$

は連続になり, 任意の $u \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ に対して $\lim_{j\to\infty} \rho_j u = u(x';0)\otimes\delta$ だから, このことは trace mapping の存在を示している.

$1/\mu(0,\tau) \in L^{p'}(\Xi^m)$ を仮定し, $\frac{1}{\nu_{p'}(\xi)} = \{\int \frac{1}{\mu^{p'}(\xi;\tau)} d\tau\}^{1/p'}$ とおく. t_0 を R^n の任意の点, u を $\mathcal{D}(R^{n+m})$ の元とすると, $\tau_{t_0}u \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ で, $(\tau_{-t_0}u)^\wedge = e^{i\langle t_0,\tau\rangle}\hat{u}$ である. また定理 1 の証明の中でのべた如く

$$\| u(\cdot,t)\|_{p,\nu_{p'}} \leqq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m/p'} \| u\|_{p,\mu}$$

である. $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ の任意の元 u をとると, $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ の中で $u = \lim u_j$ となる $u_j \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ が存在し

$$\| u_j(\cdot,t_0) - u(\cdot,t_0)\|_{p,\nu_{p'}} \leqq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m/p'} \| u_j - u\|_{p,\mu}.$$

この式から $u_j(\cdot,t_0)$ は $B_{p,\nu_{p'}}(R^n)$ で $u(\cdot,t_0)$ に t_0 にかんして一様に収束することがわかる. $t \to u_j(\cdot,t)$ は $B_{p,\nu_{p'}}(R^n)$-valued continuous function だから $u(\cdot,t)$ は t にかんして連

続な $B_{p,\nu}(R^n)$-valued function $\mathfrak{u}(t)$ である。このことから

<u>定理8</u>. $1/\mu(0,\tau) \in L^{p'}(\Xi^m)$ と仮定すると、$B_{p,\mu}(R^{n+m})$ のすべての元は $B_{p,\nu_{p'}}(R^n)$-valued continuous function $\mathfrak{u}(t)$ できまる超関数とみなされる。ここで $\nu_{p'}$ は $\frac{1}{\nu_{p'}(\xi)} = \left\{\int_{\Xi^m} \frac{1}{\mu^{p'}(\xi,\tau)} d\tau\right\}^{1/p'}$ で定まる Ξ^n 上の temperate weight function である。

証) $\mathcal{D}(R^{n+m})$ の任意の元 ϕ に対して

$$\langle \mathfrak{u}, \phi \rangle = \int_{R^m} \langle \mathfrak{u}(t), \phi(\cdot, t) \rangle dt$$

とおく。

$\mathfrak{u}(t) = u(x,t) \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ にとると $\langle \mathfrak{u}, \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle_{\mathcal{D}';\mathcal{D}}$.
$\mathcal{D}(R^{n+m})$ は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ で稠密であるから、この関係は $B_{p,\mu}(R^{n+m})$ の任意の元 u に対して成立する。

引用文献

[1] L. Hörmander, Linear partial differential operators, Springer, (1963).

[2] M. Itano, On a trace theorem for the space $H^{\mu}(R^N)$, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 30(1966), 11-29.

[3] M. Itano, Note on the canonical extensions and the boundary

values for distributions in the space H^{μ}, Hiroshima Math. J. 1(1971), 405-425.

[4] B. P. Panejah, Theorems on traces and on the extension of distributions, Mat. Zametki 2(1967), 577-588.

[5] R. Shiraishi, On the value of distributions at a point and the multiplicative products, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 31(1967), 89-104.

[6] L. R. Volevič and B. P. Panejah, Some spaces of generalized functions and embedding theorems, Uspehi Mat. Nauk, 121 (1965), 3-74.